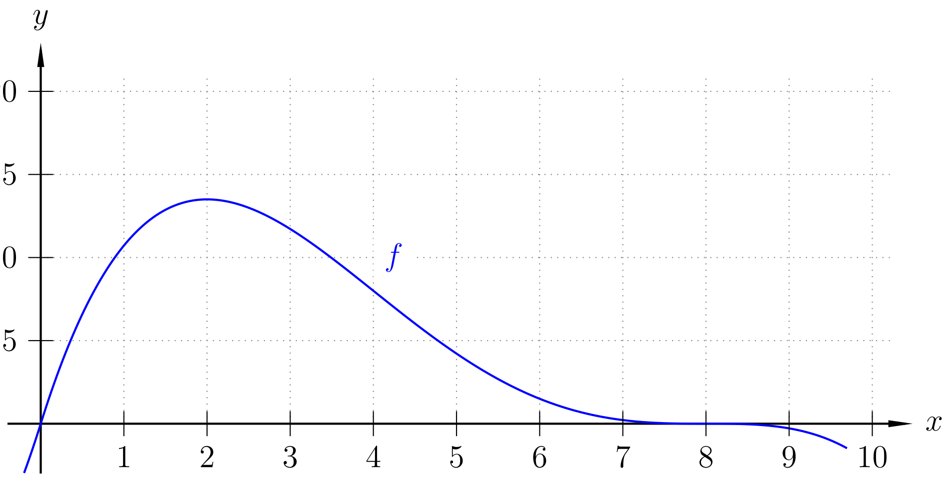
Analysis : Plutonium 241

1 Plutonium 241 - Aufgaben

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Die Tangente im Wendepunkt $W(4|8)$ des Graphen hat die Steigung -4.



1. *Funktion f*

   (a) Zeichnen Sie die beschriebene Tangente auf dem *Arbeitsblatt* ein.
   Bestimmen Sie eine zugehörige Geradengleichung mit Hilfe der gegebenen Werte.

   (3 P)

   (b) Die erste Ableitungsfunktion f' von f besitzt zwei ganzzahlige Nullstellen.
   Geben Sie diese beiden Nullstellen an.

   Der Graph von f' besitzt einen Tiefpunkt.
   Geben Sie die Koordinaten dieses Tiefpunkts an, und begründen Sie Ihre Angabe.

   (5 P)

   (c) Die Funktion f hat eine Gleichung der Form

   $$f(x) \;=\; ax^4 + bx^3 + cx^2 + 16x$$

   Bestimmen Sie die Werte a, b und c.

   (6 P)

   $\left[\text{Zur Kontrolle: } f(x) \;=\; -\frac{1}{32}x^4 + \frac{3}{4}x^3 - 6x^2 + 16x\right]$

(d) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f an der Stelle $x = 8$ einen Sattelpunkt, d. h. einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente, hat.

(4 P)

Lösung

Hinweis:
Mit gleichzeitigem Drücken von $\boxed{Strg}$ und Lösung bzw. $\boxed{Ctrl}$ und Lösung wird die Lösung in einem neuen Tab angezeigt.

Am 26. April 1986 ereignete sich in der Ukraine ein Reaktorunfall, bei dem radioaktives Plutonium-241 freigesetzt wurde. Plutonium-241 zerfällt exponentiell, d. h. in jedem Jahr nimmt die Masse des vorhandenen Plutonium-241 um einen konstanten prozentualen Anteil ab. Der Zerfall einer bestimmten Menge Plutonium-241 wird im Folgenden durch die Funktion p mit

$$p(x) = 200 \cdot e^{-0{,}048x} \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Jahren, die seit dem Reaktorunfall vergangen ist, und $p(x)$ die Masse des verbliebenen Plutonium-241 in Milligramm.

2. *Funktion p*

(a) Geben Sie die Bedeutung des Faktors 200 im Sachzusammenhang an.
Berechnen Sie den prozentualen Anteil, um den die Masse des Plutonium-241 in jedem Jahr abnimmt.

(3 P)

(b) Bestimmen Sie das Jahr, in dessen Verlauf erstmals weniger als ein Milligramm des Plutonium-241 vorhanden sein wird.

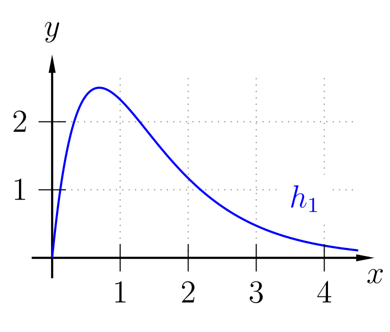
(4 P)

Lösung

Beim Zerfall eines radioaktiver Stoffes kann ein weiterer radioaktiver Stoff entstehen, der ebenfalls exponentiell zerfällt.
Für ein geeignetes $k > 0$ modelliert die Funktion h_k mit

$$h_k(x) = 10 \cdot \left(1 - e^{-kx}\right) \cdot e^{-x} \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

die zur Zeit x vorhandene Masse des neu entstandenen Stoffs. Die Abbildung zeigt den Graphen von h_1.



3. *Funktionenschar h*

   (a) Zeigen Sie, dass h_k nur die Nullstelle $x = 0$ hat.

   (2 P)

   (b) Der Graph der Funktion h_k hat genau einen Hochpunkt. Für die Ableitungsfunktion h_k' gilt

   $$h_k'(x) \;=\; 10 \cdot \big((k+1) \cdot e^{-kx} - 1\big) \cdot e^{-x}$$

   Bestimmen Sie die x-Koordinate des Hochpunktes in Abhängigkeit von k.

   (3 P)

   Lösung

4. *Funktion a*

   Beim Zerfall von Plutonium-241 entsteht ein weiterer radioaktiver Stoff Americium-241. Die Funktion a mit

   $$a(x) \;=\; 207 \cdot \big(1 - e^{-0{,}0464x}\big) \cdot e^{-0{,}0016x} \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

   gibt für jedes Jahr x die Masse des vorhandenen Americium-241 in Milligramm an.

   (a) Der Graph von a kann für einen Wert von k aus dem Graphen der Funktion h_k erzeugt werden, indem man diesen in x-Richtung und in y-Richtung streckt.
   Geben Sie die beiden Streckungsfaktoren an und bestimmen Sie den passenden Wert von k.

   (3 P)

   (b) Im Funktionsterm von a beschreibt der Faktor $1 - e^{-0{,}0464x}$ die Zunahme der Masse des vorhandenen Americium-241 und der Faktor $e^{-0{,}0016x}$ den Zerfall des vorhandenen Americium-241.
   Begründen Sie, dass es einen Zeitpunkt gibt, zu dem beide Faktoren den gleichen Wert annehmen, ohne diesen Zeitpunkt zu berechnen.

   (3 P)

   Lösung

5. *Stammfunktion H*

   Für jeden Wert von k gibt es zu der Funktion h_k eine Stammfunktion H_k mit

$$H_k(x) = -10 \cdot e^{-x} + \frac{10}{k+1} \cdot e^{-(k+1)x}$$

   Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty h_k(x)dx < 10 \quad \text{für alle} \quad k > 0$$

   gilt.

(4 P)

Lösung

Arbeitsblatt